22.02.16

(E,ρ) , A, B μη κενά υποσύνολα του E , $a\in A$

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y): x\in A \wedge y\in B\} = \inf_{(x,y)\in A\times B}\rho(x,y)$$

$$\rho(a,A)=\rho(\{a\},A)=\inf_{x\in A}\rho(a,x)$$

Ιδιότητες:

- $\rho(A,B)=\rho(B,A)$
- $\rho(A,B)\geq 0$
- $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow \rho(A,B)=0$ (το αποδείξαμε στο προηγούμενο μάθημα)

$(\not\Leftarrow)$ → θα το αποδείξουμε τώρα

Απόδειξη:

$A=\left\{\frac{1}{\nu}:\nu\in\mathbb{N}\right\}$, $\{0\}$

Ο χώρος που είμαστε είναι προφανώς ο $\mathbb{R}$ με μετρική $|\,|$ δηλ. $(\mathbb{R},|\,|)$ όπου $\rho(x,y)=|x-y|$

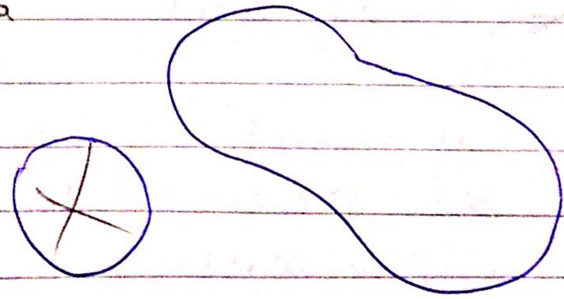
Έχουμε: $0\notin A \Rightarrow A\cap\{0\}=\emptyset$

$$\rho(\{0\},A)=\inf_{x\in A}\rho(0,x)=\inf_{x\in A}|0-x|=\inf_{x\in A}|x|=\inf_{\nu\in\mathbb{N}}\frac{1}{\nu}=0$$ ο.ε.δ.

→ το μεγαλύτερο μήκος δύο σημείων που βρίσκονται στο σχήμα

ΟΡΙΣΜΟΣ Διάμετρος του A , $\delta(A)$, ορίζεται ως:

$$\delta(A)=\sup_{(x,y)\in A^2}\rho(x,y)$$



ΟΡΙΣΜΟΣ A φραγμένο $\Leftrightarrow \delta(A) < \infty$

Το sup ενός συνόλου θα είναι $<\infty$ ή το άπειρο.

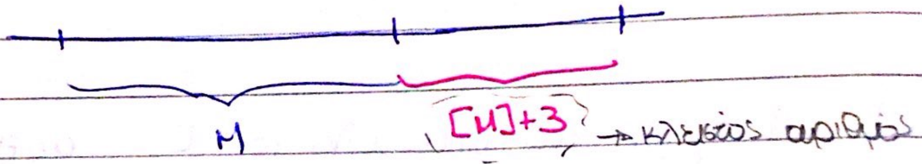
Παράδειγμα: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Θέλω ν.δ.ο. $\underbrace{\delta(\mathbb{N})}_{\text{α.ν.δ.ο. } \forall \nu \in \mathbb{R}\ \delta(\mathbb{N}) > \nu \text{ ισχύει}} = +\infty$.

Θεωρούμε τυχόν $M>0$.

$1 \in \mathbb{N}$

$[M]+3$



Έχουμε: $\rho(1, [M]+3) = [M]+2 > M$

άρα η $\delta(\mathbb{N})$ είναι άπειρη.

(Αν πάρουμε τη διακριτή μετρική, εκεί όλα τα σύνολα θα είναι φραγμένα.
$\Longrightarrow$ Αν αλλάξω τη μετρική, αλλάζει το φραγμένο)

Εφαρμογή: Αν A, B είναι φραγμένα υποσύνολα ενός μ.χ. τότε και το σύνολο $\underline{A \cup B}$ είναι φραγμένο και μάλιστα:

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \rho(A, B)$$

Γιατί $\cup$ και όχι $\cap$; Γιατί η $\cap$ είναι υποσύνολο και άρα είναι προφανές ότι θα είναι φραγμένο.

$A \subseteq B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(A)$

Απόδειξη

$\{\rho(x,y) : (x,y) \in A^2\} \subseteq \{\rho(x,y) : (x,y) \in B^2\}$

$\Rightarrow \sup\{\rho(x,y) : (x,y) \in A^2\} \leq \sup\{\rho(x,y) : (x,y) \in B^2\}$

$\Rightarrow \delta(A) \leq \delta(A)$.

Απόδειξη Εφαρμογής

Ας είναι x, y τυχόντα στοιχεία του $A \cup B$. Θέλω ν.δ.ο. είναι οφ

- $x \in A$ και $y \in A \Rightarrow \rho(x,y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B)$
- $x \in B$ και $y \in B \Rightarrow$ όμοια.
- Έστω $x \in A$ και $y \in B$. Τότε: (η πιο σημαντική περίπτωση)

$$\boxed{(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \exists z \in A \wedge w \in B : \rho(z,w) \leq \rho(A,B) + \frac{1}{\nu} \quad (*)}$$

Θα το αποδείξουμε χωριστά και θα το χρησιμοποιούμε και σε άλλες αποδείξεις.

Το $\frac{1}{\nu}$ δηλώνει ότι μπορώ να προσεγγίσω την απόσταση όσο θέλω

$$\underbrace{\rho(x,y)}_{\text{η ποσότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από το } \nu} \leq \rho(x,z) + \rho(z,w) + \rho(w,y)$$

$$\leq \underbrace{\delta(A) + \delta(B) + \underbrace{\rho(A,B) + \frac{1}{\nu}}_{\text{από την } (*) \text{ για το } \rho(z,w)}}_{\text{είναι μια ποσότητα που εξαρτάται από το } \nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Γενικά: $a_\nu \leq \beta_\nu \Rightarrow \lim a_\nu \leq \lim \beta_\nu$

$\Rightarrow \rho(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B)$ (Ουσιαστικά πήραμε τα όρια και έμειναν μόνο οι σταθερές ποσότητες)

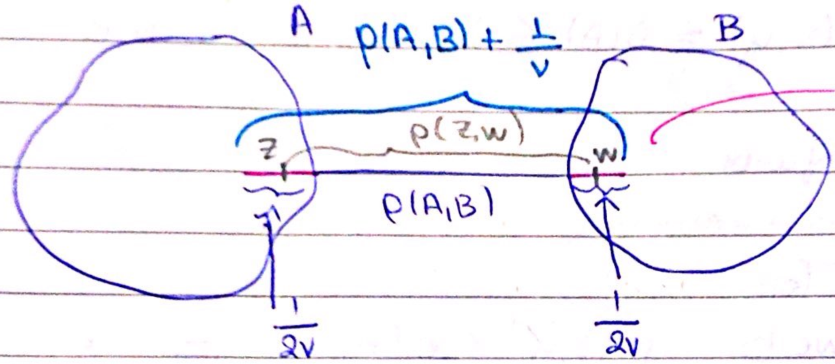
Άρα:

$\forall x, y$ εν $A \cup B$ ισχύει: $\rho(x,y) \leq \underbrace{\delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B)}_{\text{άρα όντως βρήκε άνω φράγμα}}$.

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \sup_{(x,y) \in (A\cup B)^2} \rho(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B) \\ &\text{όμως } \sup_{(x,y)\in (A\cup B)^2} \rho(x,y) = \delta(A \cup B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(A\cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B).$$

Τώρα θ' αποδείξουμε την (*), δηλ. την
$(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \exists\, z \in A \wedge w \in B : \rho(z,w) < \rho(A,B) + \frac{1}{\nu}$



αυξάνω κατά $\frac{1}{2\nu}$ και από τις δυο μεριές

Το σχήμα δεν είναι απόδειξη.

Έστω ότι δεν ισχύει η (*)
↳ άρα θα ισχύει η άρνησή της, δηλ.

$$(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(\forall w \in B)\ \rho(z,w) \geq \underbrace{\rho(A,B) + \frac{1}{\nu_0}}_{\text{↳ δηλ. αυτό είναι κ.φ.}}$$

$$\rho(A,B) = \inf_{(z,w)\in A\times B} \rho(z,w) \geq \rho(A,B) + \frac{1}{\nu_0}$$

αφού το inf είναι το μεγαλύτερο από τα κ.φ.

$$\Longrightarrow \frac{1}{\nu_0} \leq 0 \quad \lightning$$

Κι έτσι η απόδειξη της εφαρμογής είναι πλήρης.

<u>NOTE</u>: $\rho(A,B) \in \mathbb{R}$ γιατί είναι το inf ενός συνόλου πραγματικών αριθμών

Υποθέτουμε ότι έχουμε $(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2), \ldots, (E_n, \rho_n)$ μχ
Ορίζουμε $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} E_i$
: το καρτεσιανό γινόμενο

$E \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$E \ni y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ } γι' αυτά τα σημεία ορίζουμε

$$\rho(x,y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2,y_2) + \ldots + \rho_n^2(x_n,y_n)}$$

Στην περίπτωση που όλοι αυτοί οι μχ είναι ο $\mathbb{R}$ με την $| \, |$, τότε έχουμε τον $(\mathbb{R}^n, | \, |)$

Πάμε να δούμε αν μπορούμε να λέμε το $\rho(x,y)$, που μόλις ορίσαμε, μετρική.

Ο (E, ρ) θα λέγεται <u>καρτεσιανός μετρικός χώρος</u>

- $\rho(x,y) = 0 \iff \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \ldots + \rho_n^2(x_n,y_n)} = 0$

$$\iff \rho_1^2(x_1,y_1) + \ldots + \rho_n^2(x_n,y_n) = 0$$

$$\iff \rho_1(x_1,y_1) + \ldots + \rho_n(x_n,y_n) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$\iff x = y$$

- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ προφανές

- $\rho(x,y) \leq (x,z) + \rho(z,y)$

$$\iff \sqrt{\underbrace{\rho_1^2(x_1,z_1)}_{=a_1} + \ldots + \underbrace{\rho_n^2(x_n,y_n)}_{=a_n}} \leq \sqrt{\underbrace{\rho_1^2(x_1,z_1)}_{=b_1} + \ldots + \underbrace{\rho_n^2(x_n,y_n)}_{=b_n}} + \sqrt{\underbrace{\rho_1^2(z_1,y_1)}_{=c_1} + \ldots + \underbrace{\rho_n^2(z_n,y_n)}_{=c_n}}$$

δηλ. $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$ (άρα αυτό θέλουμε ν' αποδείξουμε)

<u>Είναι</u>:

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i + c_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i c_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$

το οποίο προέκυψε από την ανισότητα C-S $\quad \sum_{i=1}^{n} b_i c_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$

Μπορώ να γράψω ότι: $\quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} (b_i+c_i)^2 \quad$ αφού $a_i \le b_i + c_i$

Επίσης, μπορώ να γράψω:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\ \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)^2$$

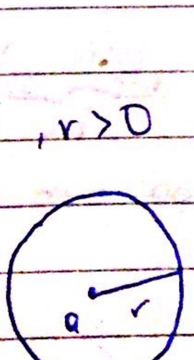
άρα: $\quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} (b_i+c_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \le \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} + \sqrt{c_1^2 + \dots + c_n^2}$ (το ζητούμενο)

Όποτε ισχύουν και οι τρεις ιδιότητες, άρα μετρική.

ΟΡΙΣΜΟΣ

(E,ρ) μ.χ. $a \in E$, $r>0$, $B(a,r) = \{x \in E \; \rho(x,a) < r\}$



Η $B(a,r)$ καλείται σφαίρα ή σφαιρική περιοχή

ΟΡΙΣΜΟΣ $U \subseteq E$, $a \in U$

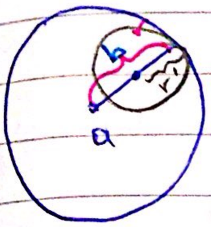
U περιοχή του $a \overset{\text{ορ}}{\iff} (\exists r>0)\ B(a,r) \subseteq U$

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $U : U(a)$

Για το b του U <u>δεν</u> μπορεί να θεωρηθεί περιοχή του b.

σημαντική! θα την χρησιμοποιούμε πολλές φορές

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε σφαιρική περιοχή είναι περιοχή τυχόντος σημείου της



Δηλ. αυτή μπορεί να θεωρηθεί περιοχή οποιουδήποτε σημείου της, άρα και του σημείου a θα μπορώ να βρω εκεί μια $B(a,r)$ με το a, άρα παίρνω τον εαυτό της.

Η πρόταση όμως μιλάει για το b.

(Από το σχήμα φαίνεται να ισχύει, όμως δεν είναι απόδειξη)

Απόδειξη

Έστω b τυχόν σημείο, $b \in B(a,r)$

Θέτουμε $r' = r - \rho(a,b)$.

Θ.δ.ο. $B(b,r') \subseteq B(a,r)$

Έστω τυχόν $y \in B(b,r') \Rightarrow \rho(y,b) < r'$

$\Rightarrow \rho(y,b) < r - \rho(a,b)$

$\Rightarrow \rho(a,b) + \rho(y,b) < r$

Όμως, $\rho(a,b) + \rho(y,b) = \rho(a,b) + \rho(b,y) \geq \rho(a,y)$

$\Rightarrow \rho(a,y) < r$

$\Rightarrow y \in B(a,r)$

Άρα, να θυμάμαι:

Οι σφαιρικές περιοχές είναι περιοχές όλων των σημείων τους.

Ας πούμε ότι είμαστε στον $\mathbb{R}^2$
Ορίσαμε τρεις συγγενείς μετρικές, $(\mathbb{R}^2,\rho)$, $(\mathbb{R}^2,\rho_1)$, $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$

$x=(x_1,x_2)$
$y=(y_1,y_2)$

$\rho(x,y)=\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}$

$\rho_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

$\rho_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

Τρεις μετρικές που ορίζονται από τρεις αντίστοιχες στάθμες.

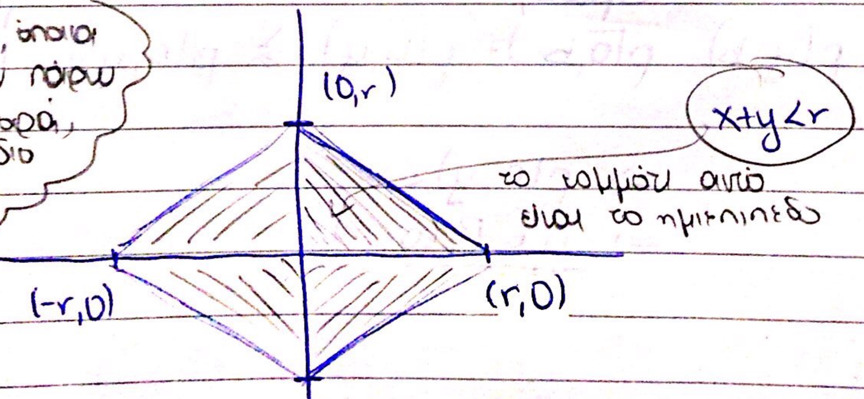
<u>Ερώτημα</u>: Τι είδους σχήμα έχει η σφαιρική περιοχή ως προς τη ρ, τη ρ_1 και τη ρ_2;

Απ. Θέλω να βρω τι σχήμα έχουν οι σφαιρικές περιοχές
$B_\rho(\vec{0},r)$, $\underbrace{B_{\rho_1}(\vec{0},r)}_{H/W}$, $B_{\rho_2}(\vec{0},r)$

Θα είναι: $B_\rho(\vec{0},r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<r\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x^2+y^2}<r\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<r^2\}$
άρα είναι το εσωτερικό του κύκλου.

$B_{\rho_2}(\vec{0},r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|+|y|<r\}$

όσον αφορά τη σύγκλιση, ποια περιοχή κι αν πάρω δεν έχει διαφορά, βρίσκω το ίδιο αποτέλεσμα



το $\alpha x+\beta y+\gamma<0$ στην ουσία γενικά είναι ένα ημιεπίπεδο

άρα είναι αυτός ο ρόμβος

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν U, V είναι περιοχές του $a \in E$ ((E,ρ) μ.χ.), τότε και το $U \cap V$ είναι περιοχή του a.

Απόδειξη

U περιοχή του $a \Rightarrow (\exists r_1 > 0)\ B(a,r_1) \subseteq U$

V περιοχή του $a \Rightarrow (\exists r_2 > 0)\ B(a,r_2) \subseteq V$

Θέτουμε $r = \min\{r_1, r_2\}$

Τότε, $\begin{cases} B(a,r) \subseteq B(a,r_1) \\ \text{και} \\ B(a,r) \subseteq B(a,r_2) \end{cases}$

άρα, $\begin{cases} B(a,r) \subseteq U \\ \text{και} \\ B(a,r) \subseteq V \end{cases} \Rightarrow B(a,r) \subseteq U \cap V$

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν U περιοχή του a και $V \supseteq U$, τότε και το V είναι περιοχή του a.

Απόδειξη

U περιοχή του $a \Rightarrow (\exists r > 0)\ B(a,r) \subseteq U$

$\xRightarrow{U \subseteq V} (\exists r > 0)\ B(a,r) \subseteq V$